Systématique modale : modélisation des échelles musicales sur une grille de 24 quarts de ton[1]

AUTEUR : AMINE BEYHOM[2]

[1] Version adaptée d'un article paru dans la revue *Musurgia* (Paris – 2005), sous le titre *Systématique modale : génération et classement d'échelles modales, modifié* pour la revue *Antouniah n° 6*, Publications de l'université antonine, Baabda-Liban, 2005, p. 226-236, Baabda-Liban.

[2] Docteur en musique et musicologie.

Systématique Modale : modélisation des échelles musicales sur une grille de 24 quarts de ton

Introduction :

La littérature arabe contemporaine en théories de la musique arabe fourmille de références au nombre de maqāmāt, utilisés en pratique ou complètement hypothétiques, de cette musique. La précision dans ce domaine ne semble pas être la règle première[3], surtout que les concepts d'échelle (modale) et de mode (voir définitions en Annexe) semblent souvent confondus chez ces théoriciens. Parmi les théoriciens passés en revue par l'auteur, deux se sont aventurés à chiffrer par le calcul le nombre de maqāmāt (ou plutôt d'échelles distinctes) potentiels de la musique arabe, et ce par la méthode du tarkīb (ou combinaison de genres) : Allāwīrdī[4] part d'un postulat (genres différenciés au comma près et création de genres commatiques intermédiaires) qui déjà à la base ne correspond pas à la réalité de la perception (par les musiciens et les auditeurs) musicale qualitative, tout en faisant l'erreur de combiner des genres entre eux sans prendre en compte l'existence d'échelles redondantes[5] suite au processus du tarkīb ; Ṣāliḥ[6] (qui ne prétend pas à l'exhaustivité) ne considère que quatre genres au sein d'une dizaine (ou trentaine selon les critères) possibles, et seulement en quarte juste – le postulat plus général du tarkīb comme méthode unique de génération d'échelles maqāmiennes est également réducteur, certaines musiques de la zone du maqām (arabe ou plus généralement orientales) ne reconnaissant pas les genres et l'analyse qui en découle.
Un des aspects de la théorie de la *Systématique modale* est justement l'identification des échelles modales potentielles en quart de ton de la théorie contemporaine du maqām : la méthode combinatoire de génération d'échelles mise au point ne se limite cependant pas au quart de ton, mais permet des extensions limitées uniquement par les capacités techniques de l'ordinateur.

I. Discrétisation et modélisation :

La discrétisation est la représentation d'une valeur réelle par une approximation chiffrée à travers la division d'un milieu continu en unités élémentaires (discrètes) : dans le cas des systèmes musicaux, la discrétisation consiste (par exemple) en une division de l'espace continu des hauteurs en quantièmes ou valeurs discrètes (chiffrables) entières (savart, cent, centième, comma, 1/8 de ton, quart de ton, limma, 1/2 ton)[7], un intervalle quelconque pouvant être plus ou moins exactement approché (approximé) par un nombre entier de ces quantièmes[8]. Le pouvoir de discrimination de l'oreille est fréquemment fixé à 5 cents (pour 1200 cents à l'octave et 100 cents par demi-ton, 50 par quart de ton). Dans le cadre de mes recherches j'utilisais un clavier arrangeur qui permettait de faire varier une note (autour d'une valeur tempérée en multiple de demi-ton) de -64 à +63 cents – la définition de ce clavier arrangeur quant aux intervalles est donc de un cent ; pendant une séance de discussion dans le cours de l'année 2002 avec des enseignants-praticiens de la musique arabe, j'ai été amené à programmer un mode Bayāt (*ré*, mi^{db}, *fa*, *sol*, *la*, si^{b}, *do*, *ré* – avec « ^{db} » == demi-bémol) sur l'arrangeur, pour les besoins de la démonstration, ce processus passant par des

[3] Sélim Hélou précisait déjà en 1974 que « Quant à notre musique orientale en général et arabe en particulier, ses maqâmât sont nombreux et leur nombre exact est inconnu ; certains disent qu'ils se dénombrent en centaines, d'autres les limitent à 95 maqâmat, et il est dit que, dans certains livres des Arabes, leur nombre atteint les mille. Et Fārābī a extrait [« Ishtaqqa »] l'équivalent de 1400 maqâmât. En réalité il existe en musique arabe des maqâmât principaux, dont le nombre est de trente à quarante, utilisés de tous temps dans tous les pays arabes. Quant aux maqāmāt secondaires, leur nombre peut atteindre le millier, 2000 ou plus... » [Hélou, p. 71]

[4] Voir Bibliographie.

[5] Le concept de redondance correspond ici à une répétition superflue d'une échelle dans le processus de génération.

[6] Voir Bibliographie.

[7] Il est bien évidemment possible de discrétiser un espace continu de manière irrégulière : le fractionnement en éléments égaux, quand la cellule élémentaire (plus petit élément) est suffisamment petite, simplifie l'interprétation des résultats.

[8] Rappelons que toute mesure, dans l'absolu, consiste en un processus de discrétisation-approximation, puis en une comparaison avec un étalon arbitraire.

touches pré-programmées qui abaissent les notes de 50 cents exactement. Un de mes interlocuteurs a immédiatement réagi à l'écoute des quelques phrases musicales que je jouais en me demandant de hausser la note SĪKĀ (mi^{db} de la musique arabe) qui était trop basse (*mi* abaissé de 50 cents) ; j'ai programmé une hausse de 15 cents (*mi* – 35 cents) qui lui a paru excessive[9] – au bout de quelques approximations successives, la hauteur précise pour le degré SĪKĀ du mode Bayāt s'est avérée correspondre à *mi* – 45 cents, donc cinq cents au dessus de la note initialement programmée et jouée. Dans le cours de discussions ultérieures avec ces enseignants et avec divers musicologues de la région, ainsi que pendant une série d'ateliers de musiques traditionnelles que j'organisais pour le compte de l'AIF[10] dans une douzaine de villages libanais[11], j'ai pu me rendre compte que le SĪKĀ du maqām Bayāt populaire (Dal`ūnā et autres pièces du répertoire populaire) était nettement plus bas que le SĪKĀ du Bayāt « savant », et pouvait se situer jusqu'à *mi* – 70 cents[12]. Le jeu du Bayāt populaire sur le `ūd (ou tout autre instrument permettant d'utiliser des intervalles variables) peut facilement donner lieu à des degrés SĪKĀ placés à cette distance du *mi*, ou encore permettre des petites variations en montée ou en descente (ou selon la tenue de la note) qui constituent le cœur de ce que peut apporter un instrument non tempéré à une musique modale. Même une petite différence de cinq cents[13] peut apporter un embellissement à la phrase musicale jouée et créer les conditions d'une interprétation différente sinon unique. Notons donc que la différence entre le SĪKĀ du Bayāt populaire et le SĪKĀ du Bayāt savant peut être supérieure à 25 cents, et ceci dans un même pays (le Liban en l'occurrence) ou encore plus élevée entre deux régions différentes de la zone du maqām (différence de l'ordre de deux commas entre la Turquie et le Liban – Bayāt populaire pour ce pays), mais la note résultante sera toujours assimilée au SĪKĀ et cela quel que soit le répertoire ou le pays (de tradition de musique arabe) soit une note intermédiaire (mais de plein « droit ») entre le mi^{b} et le *mi* tempérés : la tolérance totale (des deux côtés haut et bas – soit l'ambitus du SĪKĀ) est ici de l'ordre du quart de ton (ou l'équivalent approximatif de deux commas pythagoriciens), ce qui nous donne une première indication quant à la précision de l'instrument de mesure (ici virtuel) dont nous avons besoin pour caractériser la musique arabe entre autres.

En observant le schéma infra (qui n'a pas la prétention d'être exactement à l'échelle), nous pouvons mieux mesurer la relativité des degrés utilisés pour caractériser la musique arabe, probablement une des musiques mondiales les plus représentatives de par la complexité des intervalles utilisés. Pour cette musique, le quart de ton est l'intervalle de base pour l'approximation des intervalles utilisés dans la réalité, mais la combinatoire ne change pas : son existence (le quart de ton) permet de modéliser rapidement et fiablement les intervalles intermédiaires de la musique modale non tempérée qui peuvent effectivement exister entre les bornes (intervalles) du tempérament égal occidental, tout comme le 1/2 ton est une approximation (discrétisation au quart de ton près) des intervalles réellement utilisés[14].

[9] Dans cet exemple, j'utilise une méthode de mesure des intervalles de l'échelle par approximations successives (et alternées) par rapport à un étalon arbitraire (ici la division en cents) : ce principe est très différent de celui des mesures effectuées en laboratoires, et se base avant tout sur la perception de la hauteur du son par les premiers concernés (les musiciens – ici également luthiers) et sur la finesse de l'écoute.

[10] Agence intergouvernementale de la Francophonie.

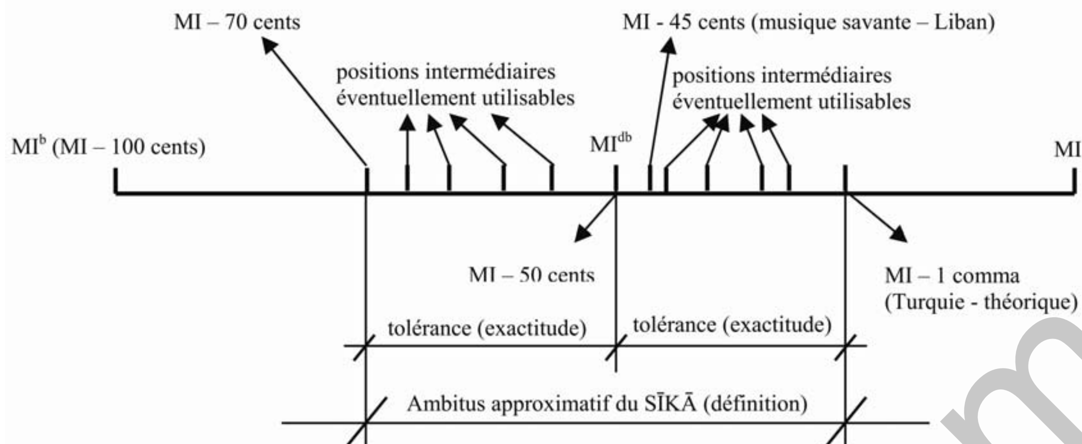
[11] Au printemps 2002.

[12] Le lecteur se demandera peut-être comment programmer un SĪKĀ à -70 cents sur le clavier arrangeur puisque la borne inférieure se situe à -64 cents : la réponse est simple, il suffit de programmer le $ré^{\#}$ (en l'occurrence mi^{b}) à +30 cents, ou encore de jouer sur un instrument non-fretté comme le `ūd.

[13] Cette limite de cinq cents n'est pas absolue : le nombre de facteurs ayant une influence sur la perception auditive est tout simplement trop grand pour une généralisation aussi « précise » - le timbre, la fréquence, en fait toutes les composantes du son peuvent jouer ici un rôle, mais aussi l'état psychologique de l'auditeur, etc. ; au cours d'un récent séjour d'études en Bretagne, j'ai pu me rendre compte que la précision relative (tous facteurs égaux par ailleurs) de l'écoute de certains sonneurs ou luthiers pouvait atteindre 2 ou 3 cents.

[14] La limite entre notation prescriptive et notation descriptive pour des musiques modales comme la musique arabe semble bien se situer entre le quart de ton et le comma : la position du degré SĪKĀ au sein du genre bayāt détermine deux intervalles de part et d'autre de ce degré approximativement équivalents à trois quarts de ton ; qualitativement, ces intervalles sont assimilés à un intervalle de trois quarts de ton – la différence quantitative peut être exprimée (et commence) par les termes « un peu plus grand » ou « un peu plus petit » : c'est là que commence la description qui, poussée à son plus haut niveau, peut devenir une description en comas, savarts, ou cents. Comparer avec cet extrait du New Grove : « Aristoxenus recognized three basic genera of tetrachords [...] The intonations were created by the two middle notes of the tetrachord, which were "movable" (kinoumenoi), in relation to the two outer notes, which were "immovable" (hestòtes). To describe these intonations Aristoxenus posited (i.21-7 : da Rios, 28.3-35.8) a tetrachord of two and a half tones, with the tone itself consisting of half tones, third tones and quarter tones. Specific numerical terms are avoided because his descriptions are

Figure 1 : tolérances du degré SĪKĀ



En d’autres termes, la notation en intervalles multiples de quarts de ton proposée par la systématique modale se rapproche plus d’une notation prescriptive (qualitative) que d’une notation descriptive (quantitative) : elle sert à définir la structure de l’échelle utilisée ; les différences d’intonation peuvent être exprimées explicitement, mais la notation deviendra de ce fait de plus en plus descriptive avec l’augmentation de la précision ; l’ensemble des notations prescriptives nous servira donc à établir une carte du territoire des musiques modales (de leurs échelles), tandis que les variations intonationelles nous serviront à différencier des pratiques géographiques, personnelles, etc.), à définir le territoire en tant que tel.

Il faut noter également que la conceptualisation des intervalles comme multiples du quart de ton semble remonter à l’Antiquité Grecque[15], et que l’intervalle de quart de ton était théorisé par nombre de théoriciens arabes (Fārābī, Ibn Sīnā[16]) et parfois décrit comme l’intervalle le plus petit que l’on puisse chanter[17]. Fārābī traite par ailleurs la question de l’adéquation des intervalles

---

intended to be approximations; the shades are not actually fixed but infinitely variable within their regions (i.23 : da Rios, 30.14-16). The character of the genera is not perceived in a particular order of specific intervals arranged sequentially in a static scale but rather in characteristic dynamic progressions of intervals, or "roads" (hodoi), that differ in ascent and descent (iii.66-72 : da Rios, 83-9). These progressions are readily recognizable, even though the exact sizes of the intervals may vary from piece to piece. In order to convey the characteristic quality of the genera, the theorist does not need to specify every possible note and interval but rather the relative sizes of interval and their typical patterns of succession. So, Aristoxenus was able to reduce the infinite number of possible arrangements to a manageable series of archetypal genera », in [Mathiesen 2001, 338 : 339].

[15] Erlanger précise [1935, Appendice, p. 305], sous le titre « Le quart de ton, ou diésis enharmonique » que « [l]e quart de ton fut connu en Grèce à une époque relativement reculée ; il y aurait été introduit par des Asiates, avec le genre enharmonique qui exerça une influence prépondérante sur la formation du système musical des Hellènes. L’adoption de ce genre amena en effet les théoriciens à établir dès la première moitié du sixième siècle avant Jésus-Christ, le principe de la « catapycnose », le morcellement de l’octave en vingt-quatre intervalles minimes censés égaux en grandeur, autrement dit la réduction de tous les intervalles mélodiques de l’échelle diatonique ordinaire à une unité fictive, le diésis enharmonique (cf. ARISTOXÈNE, *Eléments d'harmonique,* p. 7, 28, 53 Meibom ; ARISTIDE QUINTILIEN, p. 14, Meibom) » et ajoute qu’« Aristote, élève de Platon, se conforme cependant à l'enseignement traditionnel des musiciens grecs. Il ne fixe par des nombres que les trois consonances absolues : l'octave, la quinte et la quarte, et explique la division intérieure de l'échelle par la catapycnose en adoptant le diésis ou quart de ton comme unité : « Le principe est l'élément simple, comme pour les poids la mine, dans la succession des sons le diésis » *(Analytiques post.*, 1, 22). — « *Dans la mélodie le diésis est l'unité de mesure, en tant qu'intervalle minime* » *{Métaphysique,* IX, I). Aristoxène, qui était élève d'Aristote, s'en tint exclusivement à la méthode empirique des musiciens, et exclut de l'enseignement toute notion scientifique, notamment les rapports numériques. Le quart de ton ou diésis est à la base de sa doctrine ». Voir aussi la note précédente.

[16] [Fārābī, p. 201] : « Plus l’intervalle se rapproche du quart de ton, plus sa consonance sera forte », et [Ibn Sīnā:, p. 121] « Pour les petits [intervalles], on s’arrête, dans la série des rapports superpartiels, à celui de la moitié de la moitié de la moitié de la moitié de la moitié [de la corde, avec 1/2/2/2/2/2 == 1/32] (1 + 1/32) [53,27 cents]. Ce rapport se rapproche de celui de deux nombres dont l’un dépasse l’autre de son 36e (1 + 1/36) [47,43 cents] ; ce dernier rapport est celui du quart d’un des petits intervalles très important en musique et qualifié de ton. » et (p. 137-138) « Si on voulait partager l’intervalle 1 + 1/8 [203,91 cents] en fractions plus petites que son tiers, il ne conviendrait pas de dépasser son quart. Contentons-nous du quart de cet intervalle qui est le quart de ton [50,98 cents]. Un intervalle plus petit aurait une sonorité désagréable. Il en ira de même de l’intervalle 1 + 1/6 [266,87 cents], on se contentera de son cinquième [53,37 cents]. »

[17] [Ibn Sīnā, p. 123] « Si la série des intervalles emmèles est poussée au-delà du rapport 1 + 1/33 [51,68 cents], l’oreille n’est plus frappée par la différence entre les deux notes. À compter de 1 + 1/45 [38 cents], les degrés de l’intervalle se confondent tout à fait à l’oreille. »

théoriques avec la pratique musicale[18], et précise que « Un intervalle quel qu'il soit, une quinte, un *reste,* est une quantité déterminée qui mesure la distance séparant deux degrés musicaux. En pratique, cette quantité serait-elle légèrement dépassée ou bien ne serait-elle pas exactement atteinte, la tonalité n'en subirait aucune altération. La différence dont il s'agit échappe à l'oreille. »[19]

Formulation :

En tenant compte de l'approximation (inévitable dans toute théorie) des intervalles utilisés dans la pratique musicale, la question qui se pose est bien comment déterminer le nombre exact et la composition d'échelles modales, en prenant en compte les redondances ainsi que les critères musicaux inhérents à toute civilisation ? Avant de proposer une réponse, l'auteur a cru important de reformuler la question de manière à faciliter une recherche de solution.

Exposé mathématique du problème

En considérant que les échelles des modes (maqāmāt) de la musique arabe peuvent être représentés par des suites ordonnées d'intervalles approximativement multiples du quart de ton, au sein d'une gamme dont le plus petit intervalle est le demi-ton (ou des intervalles s'y rapportant), et que le plus grand intervalle réellement utilisé soit le « un ton et demi » ou l'intervalle ḥijāz[20], en sachant de surcroît que les systèmes (suites ou combinaisons d'intervalles caractéristiques) de la musique arabe appartiennent, sauf exception, à la grande famille de l'heptatonisme, nous pouvons énoncer le problème de base pour la génération et la reconnaissance des systèmes musicaux de la manière suivante :

Enoncé mathémathique général

Soit deux nombres entiers positifs imin et imax, tous deux inférieurs à une somme limite « sum_init », et tels que imin < imax. Soit un entier positif NI tel que NI soit plus petit ou égal à sum_init.
Trouver les NS(NI) combinaisons distinctes à « NI » rangs de nombres entiers successifs, de valeur comprise entre les deux bornes « imin » et « imax », de telle manière que la somme de ces nombres entiers soit égale à la somme donnée « sum_init » .

Enoncé mathémathique particulier (musique arabe heptatonique)

Trouver les combinaisons distinctes à 7 rangs de nombres entiers successifs, de valeur comprise entre les deux bornes « imin = 2 » et « imax = 6 », de telle manière que la somme de ces nombres entiers soit égale à une somme donnée « sum_init = 24 » .

Remarque : pour mieux déchiffrer l'énoncé, considérons qu'une échelle modale, indépendamment de la hauteur absolue de la tonique (ou première note-hauteur du mode pour cette définition) peut être représentée par une suite ordonnée d'intervalles qui la caractérise ; pour le mode majeur occidental, par exemple, cette suite serait (en multiples de 1/4 de ton) 4 4 2 4 4 4 2, soit, pour un mode majeur en do*, un ton (passage à* ré*), un ton (passage à* mi*), un demi-ton (passage à* fa*), etc. Pour trouver toutes les combinaisons possibles de différents intervalles pouvant former une échelle modale, il faut d'abord déterminer l'ambitus de ces intervalles au sein de l'octave ; cet ambitus est représenté par les deux termes « imin » et « imax » qui représentent respectivement l'intervalle le plus petit (borne inférieure) et l'intervalle le plus grand (borne supérieure) pouvant exister au sein d'une échelle donnée. Dans le cas de la musique arabe, par exemple, tout semble indiquer que l'intervalle minimum « imin » peut être approximé par le demi-ton (imin = deux quarts de ton) et que l'intervalle imax peut être approximé par l'intervalle ĥijāz équivalent au ton et demi (imax = six quarts de ton). Dans ce cas de figure, les intervalles intermédiaires pouvant exister au sein d'une suite ordonnée d'intervalles seront les intervalles de 3/4, 4/4 et 5/4 de ton, ou 3, 4, et 5 en multiples de quart de ton (notation RS). Ces deux nombres (imin et imax) doivent être inférieurs à l'intervalle d'octave (24 quarts de ton) sinon aucune combinaison n'est possible, et imin doit être inférieur ou égal à imax.*

[18] [Fārābī, « Discussion sur le demi-ton ; échelle formée de douze demi-tons », p. 61-63].

[19] Idem. (p. 63).

[20] En réalité, le plus grand intervalle utilisé dans les échelles avant l'apparition du piano dans les pays arabes semble bien être le 5/4 de ton, équivalent en fait à un intervalle ṭanīnī augmenté, et le genre ḥijāz en tant que tel ne semble être qu'une modification du genre awj par agrandissement de l'intervalle central.

Par ailleurs, le critère de somme initiale correspond ici en fait à l'octave (24 quarts de ton), mais peut avoir une valeur différente : en effet, nous pouvons considérer que les échelles de certains modes traditionnels sont plus petites que l'octave (échelles « lo »[21]), avec une somme initiale également plus petite que l'octave (sum_init < 24), ou plus grandes que l'octave (modes « go »[22], sum_init > 24). Plus généralement, le critère « sum_init » sert à fixer la somme des intervalles considérés au sein d'une suite ordonnée (système).

NI est le nombre d'intervalles que peut comporter un système : sept pour des systèmes heptatoniques, cinq pour des systèmes pentatoniques, etc., et en tout état de cause plus petit que sum_init, sinon la somme des intervalles composant un système sera nécessairement plus grande que cette dernière valeur (si NI est égal, par exemple, à 25 intervalles à l'octave dans le cas d'une simulation en multiples de quart de ton pour des systèmes octaviants avec sum_init == 24, la valeur minimale de la somme des 25 intervalles sera égale à 25 quarts de ton, plus grande que la valeur de l'octave == 24 quarts de ton).

*A partir de ces données, il est demandé de trouver le nombre de combinaisons des NI intervalles compris entre imin et imax (inclus) de sorte que leur somme soit égale à la somme initiale « sum_init », et de reproduire la totalité de ces systèmes, tout en éliminant les **redondances**.*

La solution de ce problème aurait pu être simple n'eût été la condition de somme imposée : en effet, le nombre de valeurs que peut prendre un intervalle (ou un entier) compris entre imin et imax équivaut à

$$\textbf{n_int_car = imax - imin + 1} \qquad \textbf{(I)}$$

n_int_car étant le nombre d'intervalles caractéristiques du problème.

Sur l'exemple de l'énoncé particulier, n_int_car = 6 – 2 + 1 = 5 intervalles caractéristiques (dont les valeurs sont 2, 3, 4, 5 et 6) ; c'est le nombre de valeurs que peut prendre la variable que constitue un intervalle multiple du quart de ton, au sein du segment <imin↔imax>, avec imin = 2, imax = 6 (bornes comprises).

Dans le cas général, le nombre « NAS » (nombre absolu de systèmes) de combinaisons des NI intervalles (nombres) compris entre n_1 et n_2 équivaut à

$$\textbf{NAS = n_int_car}^{\textbf{NI}} \qquad \textbf{(II)}$$

soit

$$\textbf{NAS = (imin – imax + 1)}^{\textbf{NI}} \qquad \textbf{(II')}$$

Dans le cas de l'énoncé particulier, NAS = 5^7 == 78125.

Reste à appliquer la *condition de somme* telle que l'addition (la somme) des valeurs des intervalles conjoints corresponde (soit égale) à une valeur donnée :

$$\sum_{n=1}^{n=NI} C(I_n) = sum_init, \quad (imin \le I_n \le imax,\ NI < sum_init) \qquad \textbf{(III)}$$

où la fonction « C » correspond à une combinaison des NI intervalles I_n (I_1, I_2 … I_{NI}), ce qui donne, dans le cas particulier,

$$\sum_{n=1}^{n=7} C(In) = 24 \ , \qquad (2 \le I_n \le 6,\ NI = 7) \qquad \textbf{(III')}$$

[21] Ou « plus Limité que l'Octave », en anglais «Lesser than the Octave ».
[22] Ou « plus Grand que l'Octave, en anglais « Greater than the Octave ».

N'ayant pas pu trouver de solution analytique satisfaisante à ce problème[23], et à fortiori pas de formule permettant de reproduire toutes les combinaisons possibles, l'étape suivante consistait à envisager une **modélisation mathématique** du problème.

Modélisation

Dans la partie précédente, nous avons pu voir brièvement la question de la détermination analytique (formulation mathématique) de l'ensemble des systèmes (en réalité sous-systèmes) octaviants pour des valeurs données d'intervalles (comprises entre les valeurs minimum « imin » et maximum « imax ») et pour un nombre NI d'intervalles successifs; le principe de la modélisation mathématique consiste à approximer la réalité de manière suffisamment rapprochée pour satisfaire aux exigences du chercheur (ou, en l'occurrence, du musicien) : les résultats recherchés ici sont avant tout les différentes configurations possibles pour des combinaisons d'intervalles ramenés à des multiples d'un intervalle de base, ainsi que, dans une phase ultérieure, leurs caractéristiques internes et leur conformité aux modes existants dans la littérature ou utilisés dans la pratique musicale. Enfin, l'étude sur le plan macroscopique devra permettre de dégager des tendances de comportement, concept que j'explore en détail dans l'étude statistique des systèmes intervalliques [Beyhom 2003 – Vol. I, 2e partie] dont certains résultats sont exposés dans la suite de l'article et en Annexe B.

Ceci étant posé, et le problème tel qu'énoncé ne semblant pas pour le moment avoir de solution analytique, il nous reste à trouver une solution informatique (modélisation), permise aujourd'hui avec l'ordinateur personnel : je propose ici de partir du particulier, sur un exemple précis, qui permettra par la suite de remonter à une formulation générale du problème et de sa solution. En l'occurrence, si nous nous limitons aux deux intervalles de un ton et un demi-ton, le problème à résoudre peut s'énoncer, dans ce cas particulier, comme suit :

- ***Enoncé du problème particulier en multiples de demi-ton***

Soit une suite de sept nombres i, j, k, l, m, n, o, dont la valeur équivaut à 1/2 ou à 1 : trouver l'ensemble (A) des combinaisons possibles de ces 7 nombres telles que leur somme soit égale à 6 [sous-entendu : 6 tons, 12 demi-tons ou encore 24 x 1/4 de ton à l'octave].

Il y a plusieurs manières de résoudre ce problème en informatique : l'algorithme mis au point, que nous n'allons pas développer dans cet article, est basé sur une combinatoire simple qui permet de retrouver les échelles sur la base d'incrémentation de nombres entiers [cf. Beyhom 2003, Vol. I, 2e partie] ; cet algorithme permet, en partant du particulier (l'exemple précis énoncé plus haut) et en généralisant cette procédure, de retrouver toutes les combinaisons possibles de NI intervalles multiples du demi-ton, du quart de ton ou de tout autre intervalle PGCD[24]. De manière plus générale, nous pouvons ainsi retrouver l'ensemble (A) des combinaisons de NI nombres entiers compris entre imin et imax donnés, et dont la somme est égale à une valeur sum_init également donnée. La recherche de redondance (cas particuliers d'échelles semblables générées par la modélisation) se fait au sein du programme informatique mis au point [Beyhom 2003 – Vol. I, 2e partie] et les échelles redondantes sont automatiquement éliminées des résultats intermédiaires et finals.

II. Résultats

À partir de cet algorithme, il devient relativement facile de générer des échelles modales (des mots) sur la base d'un ensemble d'intervalles (alphabet) prédéterminé : je donne ci-dessous quelques

[23] Un algorithme de partition par nombres entiers existe, d'application relativement simple, et qui permet de retrouver les *hyper-systèmes* (voir plus loin dans le texte) : cet algorithme ne permet par contre pas de générer toutes les échelles potentielles et de les trier, ce que la combinatoire explicite permet sans peine.

[24] PGCD == Plus Grand Commun Diviseur.

explications préalables et rappels nécessaires à la compréhension du système de rangement de la *systématique modale*.

En premier lieu, le concept de contenance, ou d'*hyper-système* : la contenance d'une échelle équivaut à un comptage des différents intervalles représentés au sein de cette échelle – Dans le cas du mode de *do*, par exemple, la contenance de l'échelle correspondante exprimée en multiples d'intervalles de un quart de ton (4 4 2 4 4 4 2) est de deux intervalles de demi-ton et de cinq intervalles équivalant à un ton ; ce comptage peut être noté de diverses manières :

- soit en notant le nombre d'occurrences des intervalles de l'alphabet utilisés – dans notre cas du mode de do, cela équivaudrait par exemple au vecteur (20500) ou deux fois 2/4 de ton, zéro fois 3/4 de ton, cinq fois 4/4 de ton, zéro fois 5/4 de ton et zéro fois 6/4 de ton[25],
- soit encore en rangeant les intervalles explicitement du plus petit au plus grand, soit (2 2 4 4 4 4 4) pour ce cas, les chiffres représentant ici des intervalles en multiples entiers du quart de ton[26].

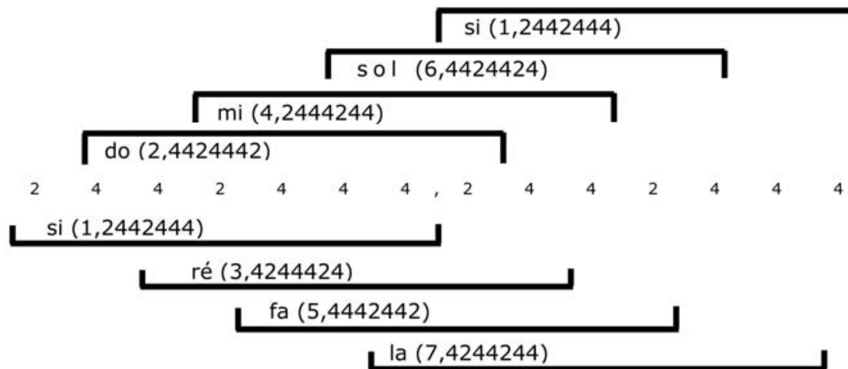
D'autres systèmes de notation sont possibles, avec des variantes dans le rangement des intervalles ou de leurs occurrences au sein d'un *système* : la *systématique modale* utilise, pour des raisons de cohérences, la notation explicite des intervalles dans la deuxième définition ci-dessus (notation RS). Nous pouvons, à partir de cet ensemble explicite d'intervalles rangés du plus petit au plus grand (et que nous appellerons désormais *hyper-système*), générer tous les *systèmes* distincts (non-redondants) composables avec ces intervalles. Toujours sur l'exemple de l'*hyper-système* du mode de *do*, nous pouvons générer en tout et pour tout les trois *systèmes* distincts (2 2 4 4 4 4 4), (2 4 2 4 4 4 4) et (2 4 4 2 4 4 4), les autres permutations d'intervalles générant des *systèmes* identiques (redondants) à l'un des trois – le *système* générant l'échelle du mode de *do* est ici en troisième position, et représenté sur un degré de départ *si* (mode de *si*), cette échelle minimisant la valeur entière de la représentation par suite d'intervalles (notation RS) concaténés[27]. Il est aisé de se rendre compte que ces trois *systèmes* musicaux peuvent générer un total de vingt-et-une échelles par rotation des intervalles (ou par décalage de la tonique pour les échelles modales), à raison de sept échelles « secondaires » (appelées désormais *sous-systèmes*) par *système*, et numérotées de un à sept selon le schéma infra qui reprend le processus pour l'échelle du mode de *si* bi-octaviant, représenté ici comme paradigme du système du mode de *do*.

[25] Cette notation est décrite comme « Représentation par Contenu intervallique » (notation « RC ») dans la théorie générale de la *systématique modale* [Beyhom 2003].

[26] Cette description correspond à la notation RS (« Représentation par Suite d'intervalles ») de la théorie générale de la *systématique modale* (idem).

[27] La concaténation des intervalles du mode de *do* résulte en le nombre entier 4424442, plus grand que 2442444 : la présente convention de rangement a été adoptée pour assurer une cohérence systématique du rangement des échelles – une représentation par maximisation du nombre entier résultant de la concaténation, ou toute autre convention, aurait également été possible. Il faut aussi ici se rappeler que la présente convention ne se limite pas au système décimal : dans le cas d'intervalles multiples du quart de ton plus grands que deux tons et un quart de ton (représentés par deux chiffres décimaux et dont la valeur est plus grande que 9), la concaténation se fait sur la base d'un système dont le chiffre le plus grand équivaut au nombre de quarts de ton contenus dans le plus grand intervalle utilisé.

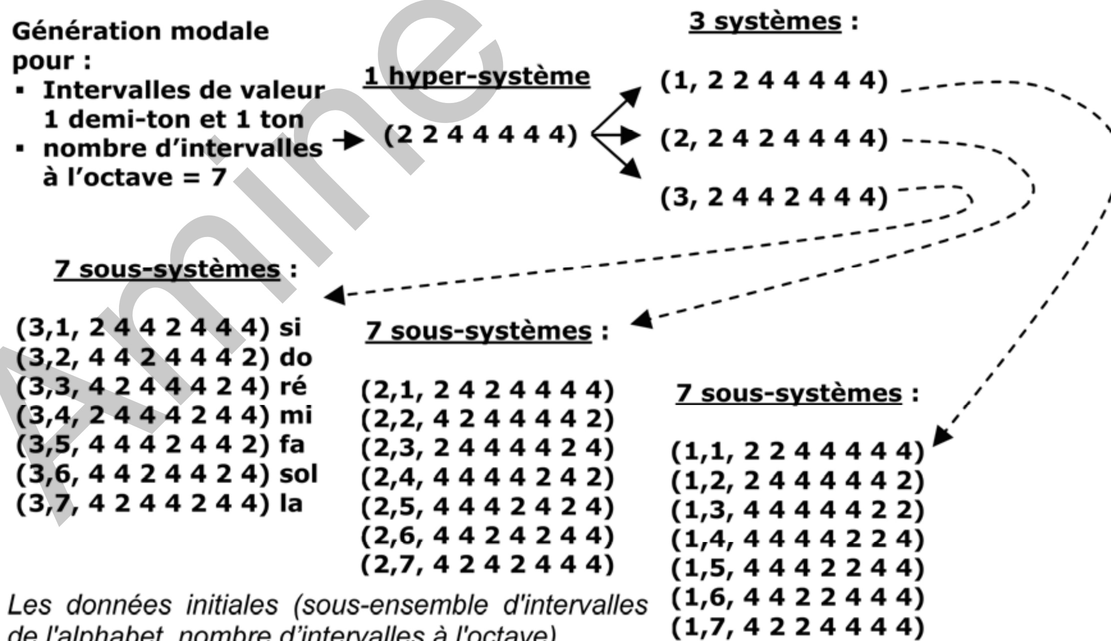
Figure 4 : processus de décalage de la tonique du mode de *si*



Dans le cadre de la *systématique modale*, l'*hyper-système* générateur (entre autres) du système paradigme du mode de *do* est un cas particulier de la construction d'échelles, avec un alphabet limité aux deux intervalles de demi-ton et de ton ; le processus de génération d'échelles modales pour cet *hyper-système* est schématisé infra.

Pour une modélisation avec l'ensemble des intervalles du sous-alphabet « réaliste » (intervalles de 2, 3, 4, 5 et 6 quarts de ton), il existe en tout 19 *hyper-systèmes* (cf. Tableau 1) qui génèrent 685 *systèmes* et 4795 *sous-systèmes* (ici, échelles octaviantes). Dans l'état actuel des connaissances, moins de 10 % de ces échelles sont utilisées dans les musiques modales traditionnelles.

Figure 5 : relations entre *hyper-systèmes*, *systèmes* et *sous-systèmes* sur l'exemple de l'*hyper-système* générateur de l'échelle du mode de *do*



Les données initiales (sous-ensemble d'intervalles de l'alphabet, nombre d'intervalles à l'octave) permettent de générer un seul et unique hyper-système octaviant : cet hyper-système génère à son tour 3 systèmes (combinaisons distinctes) rangés du plus petit (en valeur ramenée à un nombre entier) au plus grand et qui, par processus de décalage de la tonique (rotation), génèrent chacun (dans ce cas précis) sept sous-systèmes (aspects d'une échelle).

Tableau 1 : Les dix-neuf hyper-systèmes de la génération à alphabet limité (2 à 6 quarts de ton)

N° de l'hyper-système	Valeur en multiples de quart de ton	NS	NSS	NSS en quinte juste à partir de la tonique
hyper n° 1	2 2 2 2 4 6 6	15	105	58
hyper n° 2	2 2 2 2 5 5 6	15	105	23
hyper n° 3	2 2 2 3 3 6 6	30	210	54
hyper n° 4	2 2 2 3 4 5 6	120	840	208
hyper n° 5	2 2 2 3 5 5 5	20	140	56
hyper n° 6	2 2 2 4 4 4 6	20	140	80
hyper n° 7	2 2 2 4 4 5 5	30	210	40
hyper n° 8	2 2 3 3 3 5 6	60	420	120
hyper n° 9	2 2 3 3 4 4 6	90	630	168
hyper n° 10	2 2 3 3 4 5 5	90	630	210
hyper n° 11	2 2 3 4 4 4 5	60	420	96
hyper n° 12	2 2 4 4 4 4 4	3	21	12
hyper n° 13	2 3 3 3 3 4 6	30	210	46
hyper n° 14	2 3 3 3 3 5 5	15	105	29
hyper n° 15	2 3 3 3 4 4 5	60	420	120
hyper n° 16	2 3 3 4 4 4 4	15	105	30
hyper n° 17	3 3 3 3 3 3 6	1	7	0
hyper n° 18	3 3 3 3 3 4 5	6	42	12
hyper n° 19	3 3 3 3 4 4 4	5	35	18
Totaux		685	4795	1380

NS == Nombre de Systèmes générés par l'hyper-système
NSS = Nombre de Sous-Systèmes générés par l'hyper-système

Nous pouvons remarquer sur le tableau une première différentiation statistique sur la base de la contenance, ainsi que par le nombre de quartes ou quintes justes contenues dans les systèmes, et que la représentation des systèmes musicaux par intervalles permet de multiples autres tris sur la base de critères musicaux ou purement mathématiques ; dans l'Annexe B, un critère de tri supplémentaire est inclus, qui est la détection d'une double quarte et quinte (quarte, puis quinte par la présence d'un intervalle de un ton supplémentaire à partir de la quarte) à partir de la tonique.

III. Conclusions

La systématique modale est une théorie alternative de la modalité qui permet un classement inédit et exhaustif des échelles modales attestées ou potentielles de la musique modale, sur la base d'une grille composée de vingt-quatre quarts de ton : la structuration des échelles en hyper-systèmes (indicateurs de contenance des échelles), systèmes (échelle-type générant un certain nombre d'échelles – cinq pour le pentatonisme, sept pour l'heptatonisme, etc. – secondaires) et sous-systèmes (qui peuvent être assimilés à des échelles modales dès la fixation d'un degré de départ, d'une note de repos ou encore d'une tonique pour chaque échelle) permet un repérage cohérent et unique d'une échelle quelconque déduite, par exemple, d'une transcription ou d'un manuel théorique, ainsi que son rangement dans une base de données exhaustive. La méthode de classification, couplée à la représentation par suite d'intervalles, permet l'application de critères de tri à caractère musical et l'identification d'échelles à caractéristiques particulières ; ce processus peut être appliqué à un répertoire donné pour la création d'échelles nouvelles conformes à

des critères traditionnels, ou encore de manière générale pour des recherches de fond sur la structure des systèmes musicaux.

Bibliographie

ALLĀWĪRDĪ, Mīkhā'īl : « *Falsafat Al Mūsiqā Ash-Sharqiya fi Asrār Al Fan Al `Arabī* », éd. Ibn Zaydūn, 2e édition, probablement 1949.

BEYHOM, A., 2003 : *Systématique modale*, thèse de doctorat en trois volumes, Université Paris IV – Sorbonne, Paris.

CLER, J., 2000 : *Musiques de Turquie*, Actes Sud / Cité de la Musique, Paris, + CD.

ERLANGER, R., 1949 : *La musique arabe* en 6 tomes, Librairie orientaliste Paul Geuthner, Paris, Tome V : *Essai de codification des règles usuelles de la musique arabe moderne – Échelle générale des sons – Système modal*.

FĀRĀBĪ (Al ~), IXe siècle : *Kitābu-l-Mūsīqī Al-Kabīr* [Le grand livre de la musique], traduit par R. Erlanger, in : *La musique arabe*, tomes I et II, Librairie orientaliste Paul Geuthner, Paris, 1930 (t. I) et 1935 (t. II).

HÉLOU, S., R/1972 : *Al Mūsīqā An-Naẓariya (La musique théorique)*, 2e édition, Dār Al Ḥayāt, Beyrouth.

IBN SĪNĀ (Avicenne), XIe siècle : *Kitābu-sh-Shifā (Mathématiques, Chap. XII)*, traduit par R. Erlanger, in : *La musique arabe*, tome II, 1935, Librairie orientaliste Paul Geuthner, Paris.

MATHIESEN, T. J. (e.a.), 2001 : article « Greece », *The New Grove - Dictionary of Music and Musicians*, S. Sadie (éd.), London, Macmillan, 29 volumes, vol. 10, p. 327-359.

SĀLIḤ, Fatḥī: « Naḥwa Mafhūm Shāmil Muwaḥḥad lil Maqāmāt Ash-Sharqiya - Taṣawwur Mustaqbalī li Taṭawwur Al Mūsīqā Ash-Sharqiya », in *Revue Al Ḥadātha, n° 3-4*, p. 83-92.

Annexe A : Quelques définitions

Continus *(instruments)* ***: une des catégories générales de classification des instruments de musique*** *- le terme s'applique aux instruments de musique capable de reproduire, dans le cours d'une exécution standard, des variations illimitées (ou limitées seulement par la définition auditive de l'oreille) dans les intervalles utilisés. Le trombone à coulisse et le violon sont des représentants types de cette catégorie.*

Discrets (instruments) : une des catégories générales de classification des instruments de musique - *le terme s'applique aux instruments de musique capables de reproduire, dans le cours d'une exécution standard, des notes avec des intervalles fixés à l'avance soit par l'accordage, soit par la structure même de l'instrument (son organologie). Dans cette catégorie se retrouvent tous les instruments à clavier, ou encore les flûtes et les instruments à vent à clapets ou encore les instruments à cordes frettés.*

Échelle : ensemble fini de notes caractérisé par une succession d'intervalles. *La notion d'échelle est équivalente à la notion de* système *(intervallique).*

Échelle modale : échelle débutant sur une hauteur (tonique, qarār) déterminée au sein d'un système modal ; *cette hauteur (tonique, « qarār » de la musique arabe) a généralement une valeur relative.*

Maqām : mode de la musique arabe *- Ci-suit la définition d'Erlanger [1949 : 100] :*

« ... voici, d'après l'enseignement des maîtres modernes, les éléments essentiels d'un mode musical arabe :

1° L'ambitus ou l'étendue de l'échelle modale.

2° Les genres constitutifs de la gamme (al-ajnās).

3° Le point de départ (al-mabdā).

4° Les point d'arrêt momentanés ou secondaires, passagers (al-marākiz).

5° Le point de repos final ou tonique (al-qarār). »

À cette définition, il faudrait rajouter le processus de mouvement (Ṭawr An-Naghma ou Sayr Al `Amal) et les règles de modulation (Intiqāl) ou chemin(ement)s mélodiques.

Cler [2000 , 63] écrit que le mot makam, « originellement, signifie « place », « rang » », tandis que Hélou [1972, 78] précise que l'une des significations du terme serait « l'estrade sur laquelle monte le poète [Shā`ir] ou le chanteur pendant le chant ou la déclamation».

Remarque : Le maqām irakien et la nouba *marocaine se distinguent par leur structure consistant en une suite de modes apparentés et joués selon des conventions (évènementielles et contenu poétique) pré-établies.*

Mode : *dans une acception restreinte du terme, le mode est une* ***structuration d'une échelle en suite ordonnée d'intervalles, généralement octaviante, sur une tonique modale donnée et avec des appuis identifiés*** *- cette définition correspond à celle d'échelle modale à laquelle il faut rajouter une hiérarchie (appuis) de formulation mélodique ; une acception plus englobante du concept de mode permet de prendre en compte les différentes transformations possibles ou imposées (généralement par une tradition musicale), souvent temporaires, de l'échelle modale, ainsi que des modulations modales (modulation vers une autre échelle modale) intervenant simultanément ou non avec des décalages de la tonique et/ou des appuis ; il faut noter aussi que certaines conceptions du mode font intervenir le rythme ou la métrique et, surtout, la formule mélodique (Inde). Par ailleurs, le mode peut être associé, selon la culture, le contexte (y compris musical) ou l'époque, à un ethos particulier.*

Mono-continus *(instruments) : subdivision des instruments continus dans laquelle sont rangés les instruments monodiques continus - exemple, le trombone à coulisse.*

Multi-continus *(instruments) : subdivision des instruments continus dans laquelle sont rangés les instruments (potentiellement) polyphoniques continus - exemples, le violon ou le `ūd.*

Semi-continus (instruments) : *une des catégories de classification des instruments de musique ; le terme s'applique aux instruments de musique aux intervalles préfixés mais capable de reproduire, dans le cours d'une exécution standard, des variations continues[28] des intervalles utilisés - Le kaval (Bulgarie) est un représentant type de cette catégorie, dans la subdivision « mono » .*

Semi-discrets (instruments) : *une des catégories de classification des instruments de musique ; le terme s'applique aux instruments de musique aux intervalles préfixés mais capable de reproduire, dans le cours d'une exécution préparée, uniquement des variations discrètes des intervalles utilisés - les instruments à cordes avec frettes mobiles et les claviers arrangeurs avec possibilité de variation des hauteurs de notes en « un seul bouton » sont caractéristiques des instruments multi-semi-discrets[29].*

[28] Variation continue : variation limitée par la définition de l'oreille uniquement ; le positionnement des doigts sur les orifices du kaval (Bulgarie) sont de l'ordre du continu, dans un ambitus déterminé, ce qui permet au musicien de jouer, pratiquement, n'importe quelle note (dans l'ambitus – la tessiture – de son instrument).

[29] Mais un clavier arrangeur (ou synthétiseur) peut devenir un instrument (mono-)semi-continu s'il est équipé d'une molette midi affectée à la hauteur de la note jouée, ou encore d'une pédale dédiée affectée de même.

Annexe B : Liste des systèmes de la base de données restreintes des échelles octaviantes en intervalles multiples du quart de ton (ambitus : 2/4 de ton à 6/4 de ton)

Cette annexe est disponible sous ftp://ftp2.beyhom.com/beyhom/download/thesis/pdf/Appendice_A.pdf